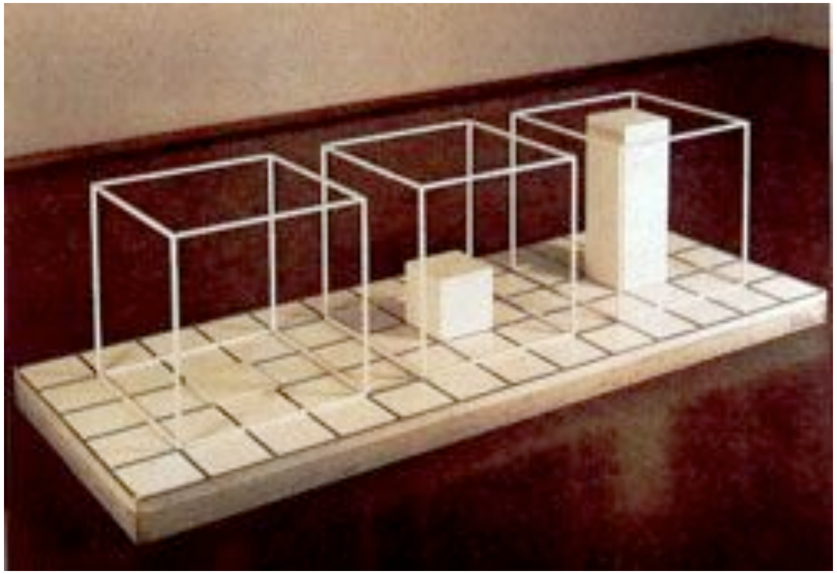
DOCENTE: Vincenzo Pappalardo
MATERIA: Matematica

SUCCESSIONI E SERIE



SUCCESSIONI

◆ Definizione

DEFINIZIONE

Successione numerica

Una successione numerica f è una funzione che associa a ogni numero naturale n un numero reale a_n:

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$$n \mapsto a_n.$$

n è la variabile indipendente e si dice **indice della successione.** a_n è la variabile dipendente e si dice **termine della successione.**

Una successione è dunque costituita da un insieme di numeri ordinato e infinito:

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots$$

ESEMPIO

La successione costituita da tutti i quadrati dei numeri naturali è una funzione f che associa a ogni numero naturale il suo quadrato.

$$
\begin{aligned}
f\colon\ & \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\
& 0 \mapsto a_0 = 0 \\
& 1 \mapsto a_1 = 1 \\
& 2 \mapsto a_2 = 4 \\
& 3 \mapsto a_3 = 9 \\
& \ldots
\end{aligned}
$$

L'insieme immagine di questa successione, cioè il codominio, è proprio l'insieme dei quadrati dei numeri naturali.

◆ Rappresentazione di una successione

Per rappresentare una successione, a volte si possono indicare i primi cinque o sei termini seguiti dai puntini di sospensione, sottintendendo che l'indice equivale alla posizione. Questo tipo di rappresentazione prende il nome di **rappresentazione per enumerazione**.

ESEMPIO

$$0, \quad 10, \quad 20, \quad 30, \quad 40, \quad 50, \quad 60, \quad \ldots$$

è la successione dei multipli di 10.

Il modo più comune di rappresentare una successione numerica (per non dare luogo ad ambiguità) consiste nello scrivere esplicitamente la relazione che lega l'indice n e il termine a_n. Questo tipo di rappresentazione si chiama **rappresentazione mediante espressione analitica**.

ESEMPIO

Consideriamo la successione:

$$a_n = \frac{2n+1}{n}, n \in \mathbb{N} - \{0\}.$$

Sostituendo a n i valori 1, 2, 3, 4, …, si ottengono i termini:

$\boldsymbol{n}$	1	2	3	4	…
$\boldsymbol{a_n = \frac{2n+1}{n}}$	3	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{9}{4}$	…

.

Una successione può essere rappresentata anche mediante una **formula ricorsiva**. Essa viene definita indicando il primo termine della successione, a_0 (o a_1), e la relazione che lega il termine successivo, a_{n+1}, con quello precedente, a_n:

$$\begin{cases} a_0 \\ a_{n+1} = f(a_n) \quad (\text{per } n \geq 0) \end{cases}$$

Quindi, per determinare l'n-esimo termine della successione occorre aver determinato tutti i termini precedenti.

ESEMPIO

Una particolare successione definita per ricorsione è la cosiddetta *successione di Fibonacci*:

$$\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$

i cui elementi, detti *numeri di Fibonacci*, sono:

$$a_0 = 1,$$
$$a_1 = 1,$$
$$a_2 = a_0 + a_1 = 2,$$
$$a_3 = a_1 + a_2 = 3,$$
$$a_4 = a_2 + a_3 = 5,$$
$$a_5 = a_3 + a_4 = 8,$$

Una stessa successione può essere rappresentata in forma sia analitica sia ricorsiva.

ESEMPIO

La successione dei numeri dispari è definita dall'espressione analitica

$$a_n = 2n + 1,$$

ma anche in modo ricorsivo:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2 \end{cases}$$

◆ Alcuni tipi di successioni

Le successioni monotòne

Una successione si dice:

- **crescente** se ogni termine è maggiore del suo precedente, ossia:
  $$a_n < a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$
- **decrescente** se ogni termine è minore del suo precedente, ossia:
  $$a_n > a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$
- **non decrescente** (o **crescente in senso lato**) se: $a_n \leq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$
- **non crescente** (o **decrescente in senso lato**) se: $a_n \geq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$
- **costante** se ogni termine è uguale al suo precedente, ossia:
  $$a_n = a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

In generale, una successione per cui vale una di queste proprietà si dice **monotòna**.

ESEMPIO

1. La successione 0, 3, 6, 9, 12, … è monotòna crescente.
2. La successione 20, 12, 4, -4, -12, -20, -28, … è monotòna decrescente.
3. La successione 0, 0, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, … è monotòna non decrescente.
4. La successione $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \ldots$ è monotòna non crescente.
5. La successione 5, 5, 5, 5, 5, 5, … è costante.

Le successioni limitate e illimitate

Una successione si dice **limitata superiormente** se tutti i suoi termini risultano minori o uguali di un numero reale M, ossia $a_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.

ESEMPIO

La successione

$$2,\ 1,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{4},\ \frac{2}{5},\ \ldots,\ \frac{2}{n+1},\ \ldots$$

è limitata superiormente, perché tutti i suoi termini sono minori o uguali a 2.

Una successione si dice **limitata inferiormente** se tutti i suoi termini risultano maggiori o uguali a un numero reale m, ossia $a_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}$.

ESEMPIO

La successione $a_n = \dfrac{n^2+1}{n}$, con $n \neq 0$, i cui termini sono

$$2,\ \frac{5}{2},\ \frac{10}{3},\ \frac{17}{4},\ \frac{26}{5},\ \ldots,\ \frac{n^2+1}{n},\ \ldots,$$

è limitata inferiormente, perché tutti i suoi termini risultano maggiori o uguali a 2.

Una successione si dice **limitata** quando è limitata sia superiormente sia inferiormente, ossia quando esistono due numeri reali m e M tali che $m \leq a_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.

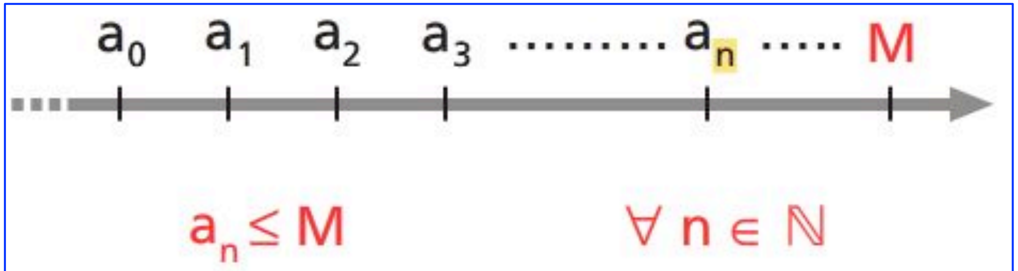
ESEMPIO

La successione $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, i cui termini sono

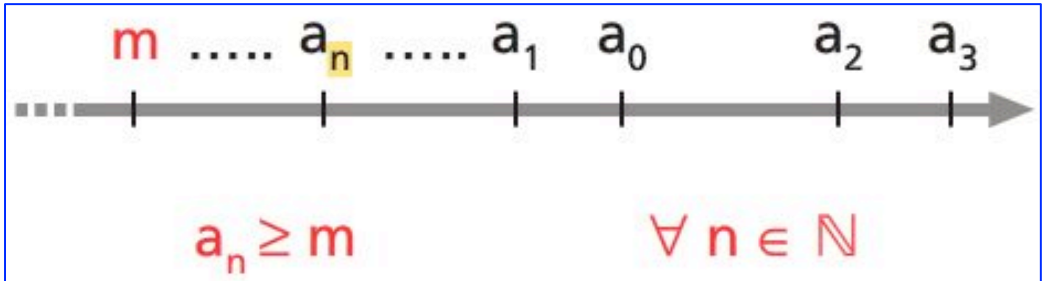
$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ \frac{6}{7},\ \ldots,\ \frac{n}{n+1},\ \ldots,$$

è una successione limitata inferiormente, perché tutti i suoi termini risultano maggiori o uguali a 0 ed è anche limitata superiormente perché la frazione $\dfrac{n}{n+1}$ è una frazione propria, pertanto minore di 1. Tutti i termini della successione risultano minori di 1, anche se 1 non fa parte di essi.

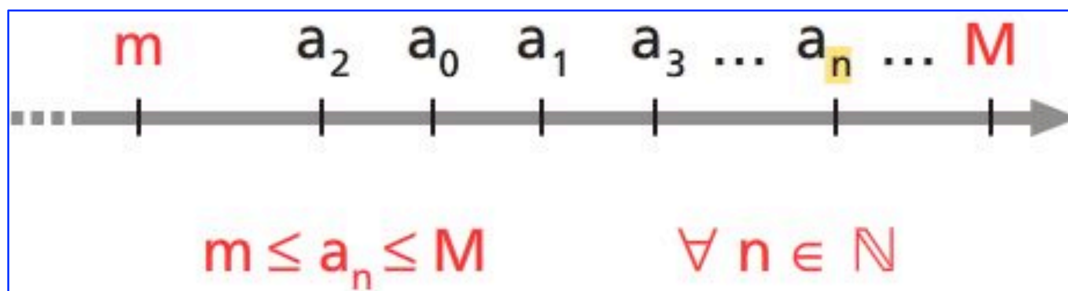
La successione data è una successione limitata.



a. Successione limitata superiormente.



b. Successione limitata inferiormente.



c. Successione limitata.

Una successione non limitata si dice **illimitata**.

ESEMPIO

La successione $a_n = 2n + 1$ dei numeri dispari

$$1, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 9, \quad 11, \quad \ldots, \quad 2n+1, \quad \ldots$$

è una successione illimitata (superiormente).

◆ Limite di una successione

Il concetto di limite di una successione è simile a quello di limite di una funzione. Tuttavia, nel caso delle successioni osserviamo che il dominio è l'insieme dei numeri naturali e non un intervallo. Poiché $\mathbb{N}$ non ammette punti di accumulazione, la variabile indipendente n non può tendere a un valore finito, ma solo a $+\infty$.

$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$

Dire che M è un numero positivo fissato ad arbitrio equivale a dire che quanto enunciato vale *per ogni* $M > 0$.

Questo vuol dire che, fissato ad arbitrio $M > 0$, da un certo indice in poi tutti i termini che seguono sono maggiori di M.

DEFINIZIONE

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$$

Data la successione di termine generale a_n, si dice che per n tendente a $+\infty$ la successione ha per limite $+\infty$ quando, fissato ad arbitrio un numero M positivo, è possibile determinare un corrispondente numero p_M positivo tale che risulti:

$$a_n > M \quad \text{per ogni } n > p_M.$$

In questo caso la successione si dice **divergente positivamente**.

ESEMPIO

Verifichiamo che la successione dei numeri naturali multipli di 3 è divergente positivamente, ossia che:

$$\lim_{n \to +\infty} 3n = +\infty.$$

Fissato un numero positivo M, dobbiamo trovare un corrispondente numero positivo p_M per cui risulti:

$$3n > M \quad \forall n > p_M.$$

Dividendo entrambi i membri per 3 otteniamo la disequazione equivalente:

$$n > \frac{M}{3}.$$

Se poniamo $p_M = \dfrac{M}{3}$, abbiamo trovato che $\forall n > p_M$ risulta $3n > M$, ossia tutti i termini con indice $n > \dfrac{M}{3}$ sono maggiori di M.

$\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$

DEFINIZIONE

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$$

Data la successione di termine generale a_n, si dice che per n tendente a più infinito la successione ha per limite $-\infty$ quando, fissato ad arbitrio un numero M positivo, è possibile determinare un corrispondente numero p_M positivo tale che risulti:

$$a_n < -M \quad \text{per ogni } n > p_M.$$

In questo caso la successione è detta **divergente negativamente.**

ESEMPIO

Verifichiamo che $\lim_{n \to +\infty} (1 - n^2) = -\infty$.

Fissato un numero positivo M, dobbiamo trovare un corrispondente numero positivo p_M per cui risulti:

$$1 - n^2 < -M, \quad \forall n > p_M.$$

Risolviamo la disequazione:

$$n^2 - 1 > M \;\rightarrow\; n^2 > M + 1 \;\rightarrow\; n > \sqrt{M+1}.$$

Se poniamo $p_M = \sqrt{M+1}$, abbiamo trovato che $\forall n > p_M$ risulta:

$$1 - n^2 < -M.$$

$\lim_{n \to +\infty} a_n = l$

DEFINIZIONE

$\lim_{n \to +\infty} a_n = l$

Data la successione di termine generale a_n, si dice che per n tendente a $+\infty$ la successione ha per limite il numero l quando, fissato ad arbitrio un numero ε positivo, è possibile determinare un corrispondente numero p_ε positivo tale che risulti:

$$|a_n - l| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n > p_\varepsilon.$$

Una successione di questo tipo si dice **convergente**.

ESEMPIO

Verifichiamo che $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}=0$.

Fissato un numero positivo ε, dobbiamo trovare in corrispondenza un numero positivo p_ε per cui risulti:

$$\left|\frac{1}{2n}-0\right|<\varepsilon \quad \to \quad \left|\frac{1}{2n}\right|<\varepsilon, \quad \forall n>p_\varepsilon.$$

Poiché $n>0$, possiamo togliere il valore assoluto:

$$\frac{1}{2n}<\varepsilon.$$

Passiamo alla disuguaglianza tra i reciproci dei due membri, cambiando anche il verso della disuguaglianza, e dividiamo poi per 2:

$$2n>\frac{1}{\varepsilon} \quad \to \quad n>\frac{1}{2\varepsilon}.$$

Se poniamo $p_\varepsilon=\frac{1}{2\varepsilon}$, abbiamo trovato che $\forall n>p_\varepsilon$ risulta:

$$\left|\frac{1}{2n}-0\right|<\varepsilon\cdot$$

$\lim_{n \to +\infty} a_n$ non esiste

Può capitare che una successione non sia né divergente (positivamente o negativamente) né convergente: in questi casi si dice che **non esiste il limite**, oppure che la successione è **indeterminata**.

ESEMPIO

Nella successione

$$a_n = (-1)^n, \qquad \text{con } n \in \mathbb{N},$$

tutti i termini hanno come valore $+1$ o -1:

$$a_n = \begin{cases} +1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Anche considerando indici molto grandi, la successione oscilla tra $+1$ e -1, pertanto non è possibile determinare un unico valore a cui si avvicina, quindi il limite non esiste.

◆ Teoremi sulle successione

I teoremi fondamentali

I teoremi che abbiamo dimostrato per i limiti delle funzioni sono validi, come casi particolari, anche per le successioni.

Ricordiamo in particolare il **teorema del confronto**:

- date le successioni a_n, b_n, c_n tali che $a_n \leq b_n \leq c_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, se $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} c_n = l$, allora esiste anche il limite di b_n per n tendente a $+\infty$ ed è uguale a l;

- date le successioni a_n, b_n tali che $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, se $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$, anche b_n tende a $+\infty$ per n tendente a $+\infty$ e, analogamente, se $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = -\infty$, anche a_n tende a $-\infty$ per n tendente a $+\infty$.

Le sottosuccessioni

Consideriamo la successione $a_n = \dfrac{n-1}{n+2}$, con $n \in \mathbb{N}$, e prendiamo i termini che hanno come indice i multipli di 3 non nulli (cioè $a_3, a_6, a_9, \ldots$):

$$\frac{2}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{11}, \ldots, \frac{3n-1}{3n+2}, \ldots$$

Abbiamo ottenuto un'altra successione detta **sottosuccessione** o **successione estratta** da quella data.

Da una successione possiamo ricavare infinite sottosuccessioni. Diamo altri due esempi di sottosuccessioni della successione appena considerata:

$$\alpha_n = \frac{2n-1}{2n+2}, \qquad \beta_n = \frac{5n-1}{5n+2}.$$

Applicando la definizione di limite alla successione data possiamo verificare che $\lim_{n \to +\infty} a_n = 1$. In modo analogo è possibile verificare che le tre sottosuccessioni tendono tutte a 1 per n tendente a $+\infty$. Questa è una proprietà generale delle successioni non indeterminate; infatti è possibile dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA

Limite delle sottosuccessioni

Se una successione a_n ammette limite $l \in \mathbb{R}$, oppure $+\infty$ o $-\infty$, per n tendente a $+\infty$, allora ogni successione estratta ammette lo stesso limite per n tendente a $+\infty$.

Se una successione è indeterminata, non è detto che anche le sue sottosuccessioni lo siano. Inoltre, se da una successione è possibile estrarre una sottosuccessione convergente, non possiamo dedurre che anche la successione di partenza sia convergente.

Per esempio, la successione indeterminata

$$1, -1, 1, -1, \dots$$

ha per sottosuccessione

$$1, 1, 1, 1, \dots,$$

che è convergente a 1.

I limiti delle successioni monotòne

Per le successioni monotòne vale il seguente teorema.

Dal teorema si deduce che *una successione monotòna non è mai indeterminata.*

TEOREMA

Limite di una successione monotòna

- Se una successione *crescente* è limitata superiormente, allora è convergente; se è illimitata superiormente, allora diverge positivamente.
- Se una successione *decrescente* è limitata inferiormente, allora è convergente; se è illimitata inferiormente, allora diverge negativamente.

ESEMPIO

1. La successione $a_n = \frac{n}{n+1}$, ossia

$$0, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad \ldots,$$

è crescente e limitata, quindi è convergente.

2. La successione dei numeri pari è crescente e illimitata, quindi è divergente.

Le operazioni con le successioni

È possibile definire anche con le successioni le quattro operazioni.

Date le successioni

$$a_0, \ a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_n, \ \ldots \qquad \text{e} \qquad b_0, \ b_1, \ b_2, \ \ldots, \ b_n, \ \ldots,$$

definiamo le seguenti operazioni.

Addizione

Si chiama somma delle due successioni la successione:

$$a_0 + b_0, \quad a_1 + b_1, \quad a_2 + b_2, \quad \ldots, \quad a_n + b_n, \quad \ldots$$

Sottrazione

Si chiama differenza delle due successioni la successione:

$$a_0 - b_0, \quad a_1 - b_1, \quad a_2 - b_2, \quad \ldots, \quad a_n - b_n, \quad \ldots$$

Moltiplicazione

Si chiama prodotto delle due successioni la successione:

$$a_0 \cdot b_0, \quad a_1 \cdot b_1, \quad a_2 \cdot b_2, \quad \ldots, \quad a_n \cdot b_n, \quad \ldots$$

Divisione

Se $b_n \neq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$, si chiama quoziente delle due successioni la successione:

$$\frac{a_0}{b_0}, \ \frac{a_1}{b_1}, \ \frac{a_2}{b_2}, \ \ldots, \ \frac{a_n}{b_n}, \ \ldots$$

- Per esempio, se $a_n = 2n$ e $b_n = n^2 - 3n$,

$$a_n + b_n = \\ = 2n + n^2 - 3n = \\ = n^2 - n.$$

- Per esempio, se $a_n = n - 1$ e $b_n = \dfrac{1}{n}$,

$$a_n \cdot b_n = \frac{n-1}{n}.$$

I teoremi sulle operazioni con i limiti

Se $\lim_{n \to +\infty} a_n = l$ e $\lim_{n \to +\infty} b_n = l'$, allora sono validi i seguenti teoremi.

- Teorema della **somma dei limiti**: $\lim_{n \to +\infty} (a_n + b_n) = l + l'$.
- Teorema della **differenza dei limiti**: $\lim_{n \to +\infty} (a_n - b_n) = l - l'$

Per esempio:

$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \right) =$

$= 0 + 1 = 1$ perché

$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ e

$\lim_{n \to +\infty} \frac{n-1}{n} = 1$.

- Teorema del **prodotto dei limiti**: $\lim_{n \to +\infty} (a_n \cdot b_n) = l \cdot l'$.
- Teorema del **quoziente dei limiti**: se $b_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ e $l' \neq 0$, allora $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{l}{l'}$.

◆ Limiti delle progressioni

Le progressioni aritmetiche

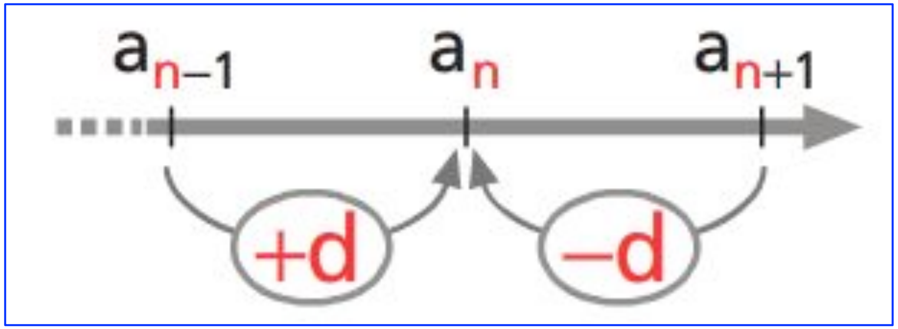
DEFINIZIONE

Progressione aritmetica

Una successione numerica si dice progressione aritmetica quando la differenza fra ogni termine e il suo precedente è costante.

La differenza costante fra un termine e il suo precedente viene chiamata **ragione** della progressione e viene indicata con d.

- Se $d > 0$, allora $a_{n+1} > a_n$ e quindi la progressione è crescente; se invece $d < 0$, allora $a_{n+1} < a_n$ e quindi la progressione è decrescente.



Molto spesso capita di considerare un numero finito di termini consecutivi della progressione. In tal caso il primo e l'ultimo termine di questo insieme ordinato sono detti **estremi** della progressione.

ESEMPIO

Consideriamo la successione:

$$10, \quad 15, \quad 20, \quad 25, \quad 30, \quad 35, \quad 40, \quad \ldots$$

È una progressione aritmetica di ragione 5. Consideriamo i primi cinque termini: avremo un insieme i cui estremi sono 10 e 30.

TEOREMA

Calcolo del termine a_n di una progressione aritmetica

In una progressione aritmetica, il termine a_n è uguale alla somma del primo termine a_1 con il prodotto della ragione d per $(n - 1)$:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d, \text{ con } n \text{ intero positivo.}$$

TEOREMA

Somma dei primi n termini di una progressione aritmetica

La somma S_n dei primi n termini di una progressione aritmetica è uguale al prodotto di n per la semisomma dei due termini estremi a_1 e a_n:

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}.$$

ESEMPIO

Calcoliamo la somma dei primi 10 termini della progressione aritmetica di primo termine 1 e ragione $d = 2$:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, \ldots$$

Poiché $n = 10$, $a_1 = 1$, risulta $a_{10} = 1 + (10 - 1) \cdot 2 = 19$ e quindi:

$$S_{10} = 10 \cdot \frac{1 + 19}{2} = 10 \cdot 10 = 10^2.$$

Il limite di una progressione aritmetica

Poiché il termine generico a_n di una progressione aritmetica di ragione d è dato dall'espressione

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d,$$

vediamo che:

1. se $d = 0$, cioè $a_n = a_1 \; \forall n > 1$, allora la successione è costante e

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = a_1;$$

2. se $d \neq 0$, allora:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} [a_1 + (n-1) \cdot d] = \begin{cases} +\infty & \text{se } d > 0 \\ -\infty & \text{se } d < 0 \end{cases}.$$

Pertanto vale la seguente proprietà.

PROPRIETÀ

Una progressione aritmetica di ragione $d \neq 0$ è sempre divergente.

Le progressioni geometriche

DEFINIZIONE

Progressione geometrica

Una successione numerica si dice progressione geometrica quando il quoziente fra ogni termine e il suo precedente è costante.

Il quoziente costante fra un termine e il suo precedente è detto **ragione** della progressione geometrica e viene indicato con q.

La ragione q non può essere mai uguale a 0.

Se consideriamo un numero finito di termini consecutivi di una progressione geometrica, il primo e l'ultimo termine sono detti **estremi** della progressione.

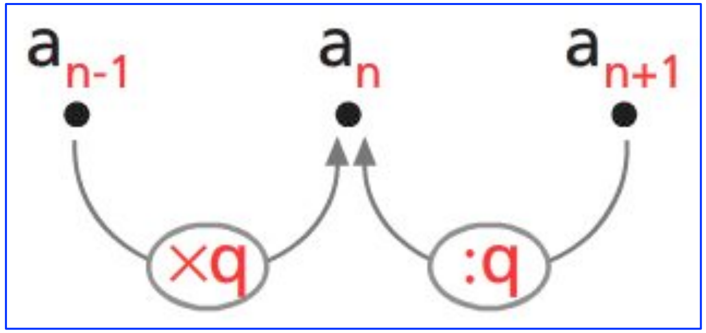
ESEMPIO

La successione

$$7, \quad 21, \quad 63, \quad 189, \quad 567, \quad \dots$$

è una progressione geometrica di ragione 3. Gli estremi dei primi 4 termini sono 7 e 189.

- se $q > 0$, i termini sono tutti o **positivi** o **negativi**;
- se $q < 0$, i termini sono **alternativamente** di **segno opposto**.



TEOREMA

Calcolo del termine a_n di una progressione geometrica

In una progressione geometrica il termine a_n è uguale al prodotto del primo termine a_1 per la potenza della ragione con esponente $(n - 1)$:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}} \text{ con } n \text{ intero positivo.}$$

ESEMPIO

Nella progressione geometrica di ragione 2, determiniamo il sesto termine sapendo che il primo termine è uguale a 3.

Poiché $a_1 = 3$, $q = 2$, il sesto termine è:

$$a_6 = 3 \cdot 2^{6-1} = 3 \cdot 2^5 = 96.$$

La progressione geometrica è
3, 6, 12, 24, 48, 96, …

TEOREMA

Somma dei primi *n* termini di una progressione geometrica

La somma S_n dei primi n termini di una progressione geometrica di ragione q diversa da 1 è espressa dalla formula:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

ESEMPIO

Calcoliamo la somma dei primi 5 termini della progressione geometrica:

$$2, \quad 8, \quad 32, \quad 128, \quad 512, \quad \ldots$$

Poiché $q = 4$, $a_1 = 2$, calcoliamo S_5:

$$S_5 = 2 \cdot \frac{4^5 - 1}{4 - 1} = 2 \cdot \frac{1024 - 1}{3} = 682.$$

Il limite di una progressione geometrica

Poiché il termine generico a_n di una progressione geometrica di ragione q è dato da

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1},$$

vediamo che:

- se $q \leq -1$, allora a_n cambia alternativamente segno al crescere di n e il suo valore assoluto tende a $+\infty$ per n tendente a $+\infty$; quindi *non esiste il limite* $\lim_{n \to +\infty} a_n$;
- se $-1 < q < 1$, cioè $|q| < 1$, allora $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$ e quindi:
  $\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} a_1 q^{n-1} = 0$;
- se $q = 1$, allora la progressione geometrica è costante e quindi $\lim_{n \to +\infty} a_n = a_1$;
- se $q > 1$, allora:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} a_1 q^{n-1} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_1 > 0 \\ -\infty & \text{se } a_1 < 0 \end{cases}$$

Comportamento della progressione geometrica al variare della ragione q.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

convergente $\rightarrow$ $\begin{cases} a_1 & \text{se } q = 1 \\ 0 & \text{se } |q| < 1 \end{cases}$ se $-1 < q \leq 1$

divergente $\rightarrow$ $\begin{cases} +\infty & \text{se } a_1 > 0 \\ -\infty & \text{se } a_1 < 0 \end{cases}$ se $q > 1$

indeterminata $\rightarrow$ non ammette limite se $q \leq -1$

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

Rappresentiamo mediante una possibile espressione analitica la seguente successione:

$$\frac{1}{2},\quad \frac{2}{5},\quad \frac{3}{10},\quad \frac{4}{17},\quad \frac{5}{26},\quad \dots$$

Possiamo notare che in ogni frazione al numeratore troviamo i numeri naturali a partire da 1, mentre il denominatore si ottiene aggiungendo 1 al quadrato di ogni numero naturale diverso da 0, cioè $n^2 + 1$, infatti:

$$2 = 1^2 + 1; \quad 5 = 2^2 + 1; \quad 10 = 3^2 + 1; \quad 17 = 4^2 + 1; \quad \dots$$

Dunque il termine generico della successione è:

$$a_n = \frac{n}{n^2 + 1}, \quad n \in \mathbb{N} - \{0\}.$$

ESERCIZIO GUIDA

Dimostriamo che la successione $a_n = \dfrac{2n-3}{n}$ è crescente.

Dobbiamo dimostrare che $a_n < a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Risolviamo la disequazione:

$$\frac{2n-3}{n} < \frac{2(n+1)-3}{n+1}.$$

Si ha:

$$\frac{2n-3}{n} < \frac{2n-1}{n+1} \quad \rightarrow \quad \frac{2n^2+2n-3n-3}{n(n+1)} < \frac{2n^2-n}{n(n+1)}.$$

Essendo $n > 0$, possiamo eliminare il denominatore e semplificare:

$$2n^2 - n - 3 < 2n^2 - n \rightarrow -3 < 0.$$

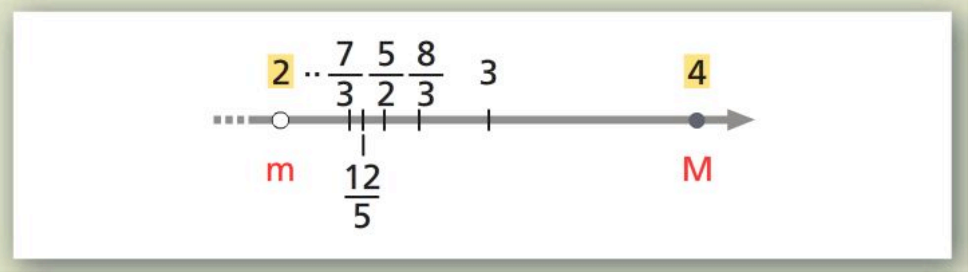
La disequazione è dunque verificata $\forall n > 0$, pertanto la successione è crescente.

ESERCIZIO GUIDA

Stabiliamo se la successione $a_n = \dfrac{2n}{n-1}$, con $n > 1$, è limitata superiormente, limitata inferiormente, limitata o illimitata.

Scriviamo alcuni elementi della successione e li rappresentiamo su una retta orientata.

$$4, 3, \frac{8}{3}, \frac{5}{2}, \frac{12}{5}, \frac{7}{3}, \ldots, \frac{2n}{n-1}, \ldots$$



La successione è limitata superiormente, perché tutti i suoi termini risultano minori o uguali a 4. Infatti, la disuguaglianza

$$\frac{2n}{n-1} \leq 4 \quad \to \quad \frac{2n-4(n-1)}{n-1} \leq 0 \quad \to \quad \frac{-2n+4}{n-1} \leq 0 \quad \to \quad \frac{n-2}{n-1} \geq 0$$

è sempre verificata, essendo $n > 1$.

Essa è anche limitata inferiormente, perché tutti i suoi termini risultano maggiori di 2. Infatti la frazione $\dfrac{2n}{n-1}$ può essere scritta come $2 \cdot \dfrac{n}{n-1}$; poiché $\dfrac{n}{n-1}$ è una frazione impropria, essa è maggiore di 1, quindi risulta $\dfrac{2n}{n-1} > 2$. Tutti i termini della successione sono maggiori di 2, anche se 2 non fa parte di essi.

Pertanto la successione data è una successione limitata.

ESERCIZIO GUIDA

Verifichiamo che la successione $a_n = n^2 - 1$ diverge positivamente.

Dobbiamo verificare che $\lim_{n \to +\infty} (n^2 - 1) = +\infty$.

Fissato ad arbitrio un numero $M > 0$, dobbiamo trovare un corrispondente numero $p_M > 0$ per cui risulti:

$$n^2 - 1 > M, \quad \forall n > p_M.$$

Risolviamo la disequazione:

$$n^2 > M + 1.$$

Poiché i due membri sono positivi, possiamo estrarre la radice quadrata:

$$n > \sqrt{M + 1}.$$

Se poniamo $p_M = \sqrt{M + 1}$, abbiamo trovato che $\forall n > p_M$ risulta $n^2 - 1 > M$, pertanto la successione data diverge positivamente.

ESERCIZIO GUIDA

Verifichiamo che la successione $a_n = 3 - n$ diverge negativamente.

Occorre verificare che $\lim_{n \to +\infty} (3 - n) = -\infty$.

Fissato un numero $M > 0$, dobbiamo trovare un corrispondente numero $p_M > 0$ per cui risulti:

$$3 - n < -M, \quad \forall n > p_M.$$

Risolviamo la disequazione:

$$-3 + n > M \quad \rightarrow \quad n > M + 3.$$

Se poniamo $p_M = M + 3$, abbiamo trovato che $\forall n > p_M$ risulta $3 - n < -M$, pertanto la successione data diverge negativamente.

ESERCIZIO GUIDA

Verifichiamo che $\lim_{n \to +\infty} \frac{2n-1}{n} = 2$.

Fissato arbitrariamente un numero $\varepsilon > 0$, cerchiamo un corrispondente numero $p_\varepsilon > 0$ per cui risulti:

$$\left| \frac{2n-1}{n} - 2 \right| < \varepsilon, \quad \forall n > p_\varepsilon \quad \to \quad \left| \frac{2n-1-2n}{n} \right| < \varepsilon \quad \to \quad \left| -\frac{1}{n} \right| < \varepsilon.$$

Essendo $n > 0$, $\left| -\frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n}$, quindi la disequazione è equivalente a: $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Passiamo ai reciproci in entrambi i membri, cambiando il verso della disuguaglianza: $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Se poniamo $p_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$, abbiamo verificato che $\forall n > p_\varepsilon$ risulta $\left| \frac{2n-1}{n} - 2 \right| < \varepsilon$.

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 - n^2}{2n^2}$.

Poiché stiamo calcolando il limite per $n \to +\infty$, possiamo considerare $n \neq 0$; quindi, raccogliendo n^2 al numeratore, abbiamo:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 - n^2}{2n^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(\dfrac{1}{n^2} - 1\right)}{2\cancel{n^2}} = -\frac{1}{2}.$$

Osservazione. In analogia a quanto visto per il calcolo del limite per $x \to +\infty$ delle funzioni fratte, si ricava la seguente regola di calcolo del limite per $n \to +\infty$ del rapporto di due polinomi in n.

Detti g_N e g_D i gradi del numeratore e del denominatore:

- se $g_N > g_D$, il limite è più o meno infinito, con segno concorde con il segno del rapporto fra i coefficienti dei termini di grado massimo del numeratore e del denominatore;
- se $g_N < g_D$, il limite è uguale a 0;
- se $g_N = g_D$, il limite è uguale al rapporto fra i coefficienti dei termini di grado massimo del numeratore e del denominatore.

ESERCIZIO GUIDA

Stabiliamo se le seguenti successioni, definite per $n \in \mathbb{N}$, sono progressioni aritmetiche o geometriche:

$$\boldsymbol{a_n = 3n - 2, \quad b_n = 4^{2n+3}, \quad c_n = n^3.}$$

- a_n è una progressione aritmetica, perché:

  $$a_n - a_{n-1} = (3n-2) - [3(n-1) - 2] = 3,$$

  ossia la differenza fra un termine qualsiasi e il suo precedente è costante. La ragione è $d = 3$.

- b è una progressione geometrica, perché:

  $$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{4^{2n+3}}{4^{2(n-1)+3}} = \frac{4^{2n+3}}{4^{2n+1}} = 4^{(2n+3)-(2n+1)} = 4^2,$$

  ossia il quoziente fra un termine qualsiasi e il suo precedente è costante. La ragione è $q = 4^2$.

- c_n non è né una progressione aritmetica né una geometrica, perché:

  $$c_n - c_{n+1} = n^3 - (n-1)^3 = \cancel{n^3} - \cancel{n^3} + 3n^2 - 3n + 1 \;\text{ e }\; \frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{n^3}{(n-1)^3} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^3,$$

  ossia sia la differenza, sia il quoziente fra un termine e il suo precedente dipendono da n.

ESERCIZIO GUIDA

a) Calcoliamo il sesto termine, a_6, di una progressione aritmetica di ragione $d = 4$ il cui primo termine è $a_1 = 5$.

b) Calcoliamo il sesto termine, a_6, di una progressione geometrica di ragione $q = 2$ il cui primo termine è $a_1 = 5$.

---

a) Utilizziamo la formula:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d.$$

Essendo $n = 6$, $a_1 = 5$ e $d = 4$, otteniamo:

$$a_6 = 5 + (6 - 1) \cdot 4 = 25.$$

La progressione è la seguente:

5, 9, 13, 17, 21, 25, …

b) Utilizziamo la formula:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Essendo $n = 6$, $a_1 = 5$ e $q = 2$, otteniamo:

$$a_6 = 5 \cdot 2^{6-1} = 5 \cdot 32 = 160.$$

La progressione è la seguente:

5, 10, 20, 40, 80, 160, …

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo la somma:

a) dei primi sei multipli di 5 diversi da 0; b) delle prime sei potenze di 3 con esponente diverso da 0.

a) I numeri di cui vogliamo conoscere la somma sono i primi sei termini della progressione aritmetica di primo termine 5 e ragione 5: 5, 10, 15, 20, 25, 30.

Applichiamo la formula $S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$. Sostituendo i dati, $n = 6$, $a_1 = 5$, $a_6 = 30$, otteniamo:

$$S_6 = 6 \cdot \frac{5 + 30}{2} = 105.$$

b) I numeri di cui vogliamo calcolare la somma sono i primi sei termini della progressione geometrica di ragione 3 e primo termine 3:

3, 9, 27, 81, 243, 729.

Usiamo la formula $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$. Sostituendo $n = 6$, $a_1 = 3$, $q = 3$, otteniamo:

$$S_6 = 3 \cdot \frac{3^6 - 1}{3 - 1} = 3 \cdot \frac{729 - 1}{2} = 3 \cdot \frac{728}{2} = 1092.$$

SERIE

◆ Definizione

Abbiamo già visto che un numero decimale finito può essere scritto come somma di numeri interi e/o di numeri frazionari.
Per esempio:

$$2,491 = 2 + \frac{4}{10} + \frac{9}{100} + \frac{1}{1000}\ .$$

Possiamo eseguire l'addizione perché è formata da un numero finito di addendi.

Consideriamo ora un numero decimale illimitato periodico. Per esempio, se scriviamo

$$3,\bar{5} = 3,5555\ldots = 3 + \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{5}{10\,000} + \ldots,$$

che significato diamo a questa addizione di infiniti addendi?

Per rispondere, consideriamo la successione 3, $\frac{5}{10}$, $\frac{5}{100}$, $\frac{5}{1000}$, $\frac{5}{10\,000}$, … e costruiamone un'altra mediante *somme parziali* dei suoi termini:

$$s_1 = 3,$$

$$s_2 = 3 + \frac{5}{10} = 3{,}5,$$

$$s_3 = 3 + \frac{5}{10} + \frac{5}{100} = 3{,}55,$$

$$s_4 = 3 + \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} = 3{,}555,$$

$$s_5 = 3 + \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{5}{10\,000} = 3{,}5555,$$

$$\ldots$$

Quando scriviamo la precedente uguaglianza tra il numero $3,\overline{5}$ e la somma di infiniti termini, in realtà affermiamo che la successione di somme parziali che abbiamo costruito ha per limite il numero $3,\overline{5}$.

In generale, il procedimento che abbiamo esaminato porta ai concetti di *serie* e di *somma di una serie* e serve per studiare l'addizione di infiniti addendi.

DEFINIZIONE

Serie numerica

Data una successione di numeri $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, si chiama serie numerica la successione:

$$
\begin{aligned}
&s_1 = a_1,\\
&s_2 = a_1 + a_2,\\
&s_3 = a_1 + a_2 + a_3,\\
&\ldots\\
&s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n,\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

I numeri $a_1, a_2, a_3, \dots$ si chiamano **termini** della serie; a_n si chiama **termine generale**; le somme $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$ si dicono **somme parziali** o **ridotte** della serie. s_n si chiama **ridotta *n*-esima** o **ridotta di ordine *n***.

È possibile indicare una serie con $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Il simbolo $\sum_{n=1}^{+\infty}$ si chiama *sommatoria* e si legge «sommatoria in n da 1 a più infinito». Si ha quindi:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

ESEMPIO

Le ridotte della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (2n-1)$ sono:

$$s_1 = 1,\ s_2 = 1 + 3 = 4,\ s_3 = 1 + 3 + 5 = 9,\ s_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16,$$

$$s_5 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25, \dots$$

Utilizzando il simbolo di sommatoria, la ridotta n-esima può essere scritta come:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

ESEMPIO

Consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n}$.

I suoi termini sono:

$$a_1 = 2,\ a_2 = \frac{2^2}{2} = 2,\ a_3 = \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3},\ a_4 = \frac{2^4}{4} = 4,\ \dots,\ a_n = \frac{2^n}{n},\ \dots$$

Le ridotte sono:

$$s_1 = 2,\ s_2 = 2 + 2 = 4,\ s_3 = 2 + 2 + \frac{8}{3} = \frac{20}{3},\ \dots,\ s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k},\ \dots$$

◆ Serie convergenti, divergenti, indeterminate

La definizione di serie è stata introdotta per dare significato all'addizione di un numero infinito di termini. Alcune volte tale addizione dà per risultato un numero, altre volte non dà risultato. A seconda del comportamento, una serie può essere *convergente*, *divergente*, *indeterminata*.
Il comportamento di una serie viene chiamato **carattere** della serie.

Serie convergente

DEFINIZIONE

Serie convergente

Una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente se la successione delle sue ridotte ha un limite finito, cioè se $\lim_{n \to +\infty} s_n = s$, $s \in \mathbb{R}$.

Il numero s si chiama **somma** o **valore** della serie e si scrive anche:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s.$$

ESEMPIO

Consideriamo la seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n(n+1)}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1 \cdot 2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2 \cdot 3}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3 \cdot 4}} + \ldots + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n(n+1)}} + \ldots$$

Il suo termine generale, $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$, può essere scritto come somma algebrica di due frazioni più semplici:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Quindi, la ridotta n-esima s_n è:

$$s_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \\ + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Eliminiamo le parentesi e semplifichiamo; restano soltanto il primo e l'ultimo addendo:

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Passando al limite per $n \to +\infty$, otteniamo:

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = 1.$$

Pertanto, la serie ha per somma 1: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

Serie divergente

DEFINIZIONE

Serie divergente

Una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è:

- divergente positivamente se la successione delle sue ridotte ha limite $+\infty$:

  $\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty$;

- divergente negativamente se la successione delle sue ridotte ha limite $-\infty$:

  $\lim_{n \to +\infty} s_n = -\infty$.

In questo caso si dice che la **somma** della serie è $+\infty$ (oppure $-\infty$) e si scrive anche:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty \qquad \left(\text{oppure } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\infty\right).$$

ESEMPIO

Esaminiamo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} 2n$. I suoi termini sono: 2, 4, 6, …, $2n$ …

Essi costituiscono la progressione aritmetica dei numeri pari, cioè la progressione di ragione $d = 2$, che ha come primo elemento $a_1 = 2$. Calcoliamo la ridotta n-esima utilizzando la formula della somma dei primi n elementi di una progressione aritmetica:

$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2 + 2n}{2} n = (n+1)n = n^2 + n.$$

Dato che $\lim_{n \to +\infty}(n^2 + n) = +\infty$, la serie diverge positivamente e scriviamo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2n = 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n + \ldots = +\infty.$$

Serie indeterminata

Una serie indeterminata si dice anche **oscillante**.

DEFINIZIONE

Serie indeterminata

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è indeterminata se la successione delle sue ridotte è indeterminata, cioè se non è né convergente né divergente.

ESEMPIO

Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ e scriviamo i suoi termini:

$$a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = -1, a_4 = 1, \ldots, a_n = (-1)^n, \ldots$$

La successione delle ridotte è:

$$s_1 = -1, s_2 = 0, s_3 = -1, s_4 = 0, s_5 = -1, \ldots, s_{2n} = 0, s_{2n+1} = -1, \ldots$$

Le ridotte hanno alternativamente valori -1 e 0, pertanto la loro successione è indeterminata. La serie data è quindi indeterminata.

La serie geometrica

DEFINIZIONE

Serie geometrica

Si chiama serie geometrica di ragione q la serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + \ldots$$

I suoi termini sono quelli della progressione geometrica che ha la stessa ragione q e come primo elemento 1.

ESEMPIO

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \ldots$$

è la serie geometrica di ragione $\frac{1}{5}$.

Comportamento della serie geometrica al variare della ragione q.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$$

divergente → $+\infty$ se $q \geq 1$

convergente → $\dfrac{1}{1-q}$ se $-1 < q < 1$

indeterminata → $\nexists$ somma se $q \leq -1$

Le proprietà delle serie

Per le serie valgono queste proprietà.

Proprietà distributiva
Se c è un numero reale diverso da 0, le serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} ca_n$ hanno lo stesso carattere.

Se sono convergenti, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} ca_n = c \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Proprietà associativa
Data una serie convergente oppure divergente, se associamo i suoi termini in gruppi contenenti un numero finito di addendi consecutivi, otteniamo una serie che ha la stessa somma (finita o infinita).

Non vale invece la proprietà commutativa:
se modifichiamo l'ordine dei termini di una serie, in generale ne otteniamo un'altra che ha una somma diversa o un diverso carattere.

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

Scriviamo la seguente serie utilizzando il simbolo di sommatoria:

$$2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} + \ldots$$

Procediamo in due tappe:

a) cerchiamo l'espressione di un termine qualsiasi della somma in funzione dell'indice n;
b) determiniamo il valore iniziale di n.

a) I termini della serie sono frazioni i cui denominatori rappresentano la successione dei numeri naturali, mentre ogni numeratore è sempre il successivo del denominatore. Possiamo pertanto scrivere:

$$a_n = \frac{n+1}{n}\,.$$

b) Il primo termine della serie è 2, che si ottiene assegnando a n in a_n il valore 1.

La scrittura cercata è pertanto $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n}$.

Osservazione. Tale scrittura non è univocamente determinata. Infatti, si può anche notare che i numeratori costituiscono la successione dei numeri naturali a partire da 2, mentre ogni denominatore è il precedente del numeratore.

Si può quindi scrivere: $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n-1}$.

ESERCIZIO GUIDA

Dimostriamo, applicando il principio di induzione, che:

$$\sum_{k=1}^{n}(4k-1) = 3+7+11+15+\ldots+(4n-1) = n(2n+1), \quad n \in \mathbb{N}-\{0\}.$$

Per $n = 1$ la proposizione è vera. Infatti, il primo membro è 3 e il secondo membro è $1 \cdot (2+1) = 3$.

Supponiamo ora che la proposizione sia vera per n, dimostriamo allora che è vera anche per $n+1$.

Il primo membro per $n+1$ diventa:

$$3+7+11+15+\ldots+(4n-1)+[4(n+1)-1] =$$

$$= n(2n+1)+[4n+4-1] = 2n^2+n+4n+3 = 2n^2+5n+3.$$

Il secondo membro per $n+1$ è:

$$(n+1)[2(n+1)+1] = (n+1)(2n+3) = 2n^2+5n+3.$$

La proposizione è quindi vera per $n+1$.

ESERCIZIO GUIDA

Applicando la definizione, verifichiamo che la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - n}$ è convergente e ne determiniamo la somma.

Dobbiamo verificare che il limite della successione s_n delle ridotte per $n \to +\infty$ è un numero finito, ossia che $\lim_{n \to +\infty} s_n = s$.

Riscriviamo il termine generale $a_n = \dfrac{1}{n^2 - n} = \dfrac{1}{n(n-1)}$ e calcoliamo s_n:

$$s_n = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \ldots + a_n = \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 4} + \frac{1}{6 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n(n-1)}\,.$$

Poiché non siamo in grado di calcolare il limite di questa espressione, cerchiamo di scrivere il termine generico a_n come somma algebrica di due frazioni, ovvero cerchiamo due numeri A e B tali che:

$$a_n = \frac{1}{n(n-1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n-1}\,.$$

Svolgiamo i calcoli:

$$\frac{A}{n}+\frac{B}{n-1}=\frac{A(n-1)+Bn}{n(n-1)}=\frac{(A+B)n-A}{n(n-1)}\ .$$

Per il principio di identità dei polinomi, deve essere:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A=1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad A=-1, \quad B=1.$$

Riscriviamo a_n e la serie assegnata:

$$a_n=\frac{-1}{n}+\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n} \quad \rightarrow \quad \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-n}=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right).$$

La ridotta s_n assume la forma:

$$s_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n}.$$

Siamo in grado ora di calcolare il limite di s_n per $n\rightarrow+\infty$, ossia $\lim_{n\rightarrow+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$.

Concludiamo che la serie $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-n}$ è convergente e la sua somma vale 1.

Osservazione. Una serie del tipo $(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+(a_3-a_4)+\ldots+(a_n-a_{n+1})+\ldots$ è detta **telescopica**. Per essa vale: $s_n=a_1-a_{n+1}$ e $\lim_{n\rightarrow+\infty}s_n=a_1-\lim_{n\rightarrow+\infty}a_{n+1}$.

ESERCIZIO GUIDA

Applicando la definizione, verifichiamo che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{12n+25}{20}$ è divergente.

Scriviamo la serie in forma estesa:

$$\frac{37}{20} + \frac{49}{20} + \frac{61}{20} + \frac{73}{20} + \ldots + \frac{12n+25}{20} + \ldots$$

Osserviamo che da ogni termine possiamo ottenere il successivo sommando $\frac{12}{20}$, ovvero $\frac{3}{5}$.

Gli addendi della serie formano una progressione aritmetica di ragione $\frac{3}{5}$, aventi come primo elemento $\frac{37}{20}$.

Pertanto, possiamo calcolare la ridotta s_n ricordando che, se a_n è una progressione aritmetica, vale:

$$s_n = n\frac{a_1 + a_n}{2}.$$

Poiché $a_1 = \frac{37}{20}$ e $a_n = \frac{12n+25}{20}$, otteniamo:

$$s_n = \frac{n}{2}\left(\frac{37}{20} + \frac{12n+25}{20}\right) = \frac{n}{2}\left(\frac{31}{10} + \frac{3}{5}n\right) = \frac{31}{20}n + \frac{3}{10}n^2.$$

Calcolando infine $\lim_{n\to+\infty} s_n$, possiamo stabilire il carattere della serie.

Poiché $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{31}{20}n + \frac{3}{10}n^2\right) = +\infty$, la serie diverge positivamente.

ESERCIZIO GUIDA

Applicando la definizione, verifichiamo che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\pi \cdot \frac{2n+1}{2}\right)$ è indeterminata.

Riscriviamo la serie nel modo seguente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\pi \cdot \frac{2n+1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) =$$

$$= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 3\pi\right) + \ldots = -1 + 1 - 1 + \ldots,$$

da cui $s_1 = -1$, $s_2 = 0$, $s_3 = -1$, $s_4 = 0, \ldots$

Le ridotte assumono valore -1 o 0 a seconda che n sia dispari o pari.
Pertanto, $\lim_{n \to +\infty} s_n$ non esiste e la serie è indeterminata.

ESERCIZIO GUIDA

Studiamo la seguente serie geometrica. Se la serie è convergente, calcoliamo la sua somma.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^n.$$

Si tratta di una serie geometrica di ragione $q = \frac{3}{7}$. Poiché $-1 < q < 1$, la serie converge.

Calcoliamo la somma $s = \dfrac{1}{1-q}$:

$$s = \frac{1}{1-\frac{3}{7}} = \frac{7}{4}\,.$$

ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo per quali valori reali di x la serie geometrica $\sum_{n=1}^{+\infty} (x^2 - 3x + 1)^n$ converge.

La ragione q è $x^2 - 3x + 1$ e, per la convergenza, deve essere $-1 < q < 1$. Quindi risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 1 > -1 \\ x^2 - 3x + 1 < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 0 \\ x^2 - 3x < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x-1)(x-2) > 0 \\ x(x-3) < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 1 \vee x > 2 \\ 0 < x < 3 \end{cases} \rightarrow 0 < x < 1 \vee 2 < x < 3.$$

Perciò la serie converge se $0 < x < 1 \vee 2 < x < 3$.

MATEMATICA E DINTORNI

◆ Paradossi di Zenone

Zenone di Elea, filosofo greco del V secolo a.C., usava il paradosso come strumento retorico per dimostrare «a rigor di logica» le idee del suo maestro Parmenide, spesso in contraddizione col senso comune e l'esperienza. Se Parmenide voleva dimostrare che l'«Essere» è unico e immutabile, Zenone costruiva giochi logici per negare addirittura il movimento.

Nelle ipotesi di uno dei suoi paradossi diceva che per attraversare l'intera lunghezza di uno stadio bisogna prima percorrerne la metà, prima ancora un quarto, ancora prima un ottavo e così via. Zenone rappresentava quindi una distanza come una somma infinita di frazioni, o meglio, come la serie numerica formata dalle potenze di $\frac{1}{2}$:

$$\boxed{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\ldots=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}.}$$

Il paradosso di Zenone continuava sostenendo che era quindi impossibile percorrere in un tempo finito una quantità infinita di parti di spazio: ne sarebbe sempre e comunque rimasta una davanti a chi si fosse cimentato nell'impresa, qualunque fosse stata la distanza in oggetto.

A parole il ragionamento fila, ma, tenendo conto del passaggio al limite e della formula che ci permette di calcolare la somma della serie geometrica di ragione $\frac{1}{2}$, la serie che descrive gli infiniti spazi percorsi nello stadio ha per somma:

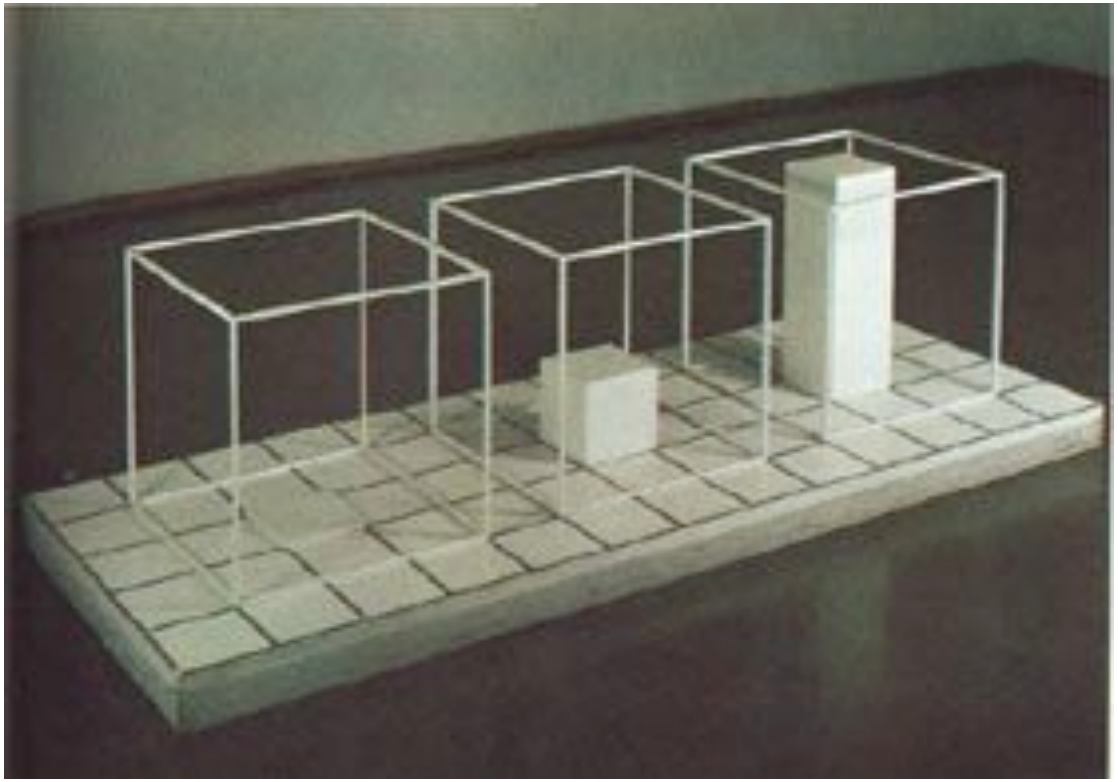
$$\boxed{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1}$$

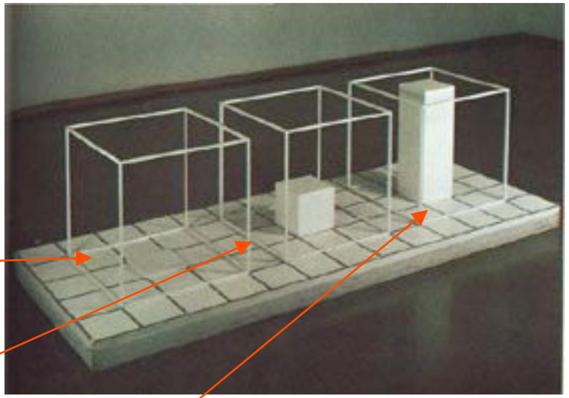
Il paradosso è quindi svelato. La distanza è finita anche «a rigor di logica» e quindi percorribile in un tempo finito, nonostante sia rappresentabile come somma di infiniti termini. Oltre al paradosso dello stadio, anche il paradosso di Achille e quello della freccia speculano sull'infinita divisibilità dello spazio; l'attenzione su questo tema è il motivo per cui molti matematici si sono interessati a Zenone di Elea.

L'artista presenta in forma visiva una serie matematica.

Sol LeWitt
3 Part Set 789

1968, Colonia, Wallraf-Richartz Museum





$S_0 = 0$

$S_1 = 0 + 1 = 1$

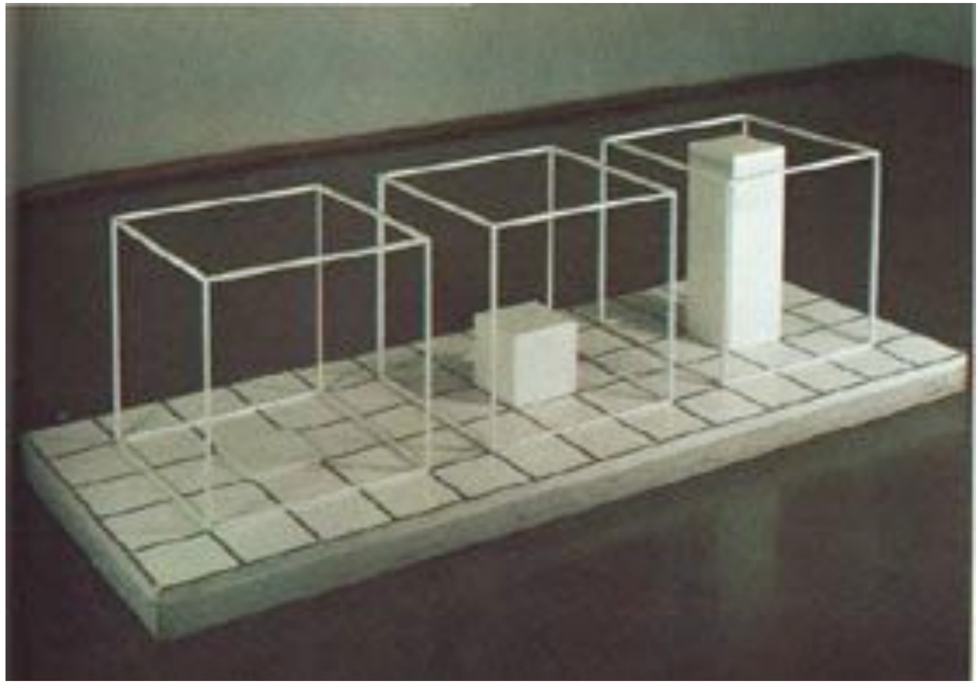
$S_2 = 0 + 1 + 2 = 3$

$$S_3 = \sum_{n=0}^{3} n = 0 + 1 + 2 + 3 = 6$$

Quando gli addendi sono infiniti si parla di serie.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots\ldots$$

Quanto vale questa somma?

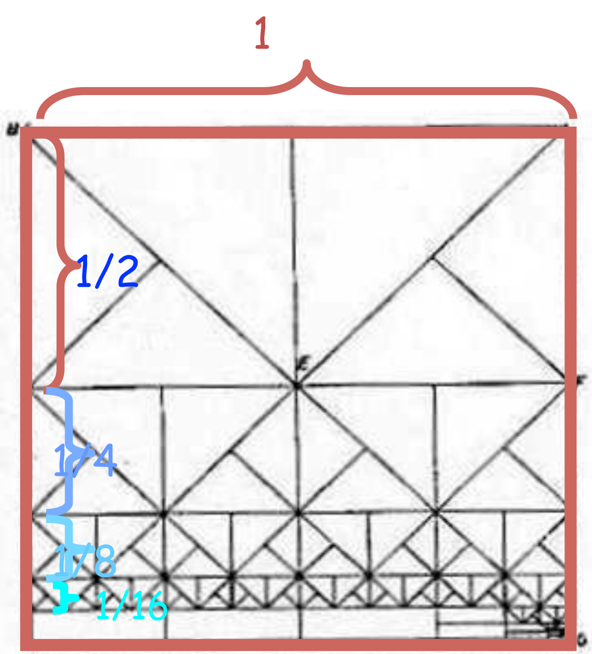


Poiché nel cubo di lato 3 l'ultima ridotta rappresentabile è $S_6 = 21$, i numeri 7 8 9 presenti nel titolo dell'opera potrebbero ricordare che il calcolo delle ridotte, la cui rappresentazione esce dai confini del cubo (**la serie è divergente**), può essere proseguito all'infinito.

Ma la somma di infiniti numeri può essere uguale a un numero finito?!

Proviamo con un altro esempio.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots\cdots = 1$$



Escher
Limite del quadrato
(1964)

La struttura di quest'opera di Escher è basata proprio su tale serie, detta serie geometrica di ragione 1/2